

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
Β' ΤΑΞΗΣ στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι σημεία του επιπέδου και $M(x, y)$ το μέσο του

AB , να αποδείξετε ότι: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ (10 μονάδες)

A2. Τι ονομάζουμε έλλειψη, με εστίες δυο σημεία E, E' ενός επιπέδου; (5 μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ ισχύει: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

β. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν $A^2 + B^2 - \Gamma > 0$.

γ. Η παραβολή με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα ευθεία την $x = -\frac{p}{2}$ έχει

εξίσωση $y^2 = 2px$.

δ. Το εμβαδό τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AG}) \right|$

ε. Η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$,
 δίνεται από τον τύπο: $y_1x + x_1y = \rho^2$ (2x5=10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία $A(4, 1)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(\lambda-1, \lambda+2)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα A, B, Γ να είναι συνευθειακά (13 μονάδες)

B2. Για $\lambda = 3$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (12 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή $A(2, 1)$. Η εξίσωση του ύψους $B\Delta$ είναι

$x + y = 1$ και η εξίσωση της διαμέσου BM είναι $3x - 2y = -2$. Να βρεθούν:

Γ1. Η εξίσωση της πλευράς AG (9 μονάδες)

Γ2. Οι συντεταγμένες των κορυφών B και Γ (16 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$, και η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|x - 2|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|y + \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 = 0 \quad (1)$$

Δ1. Δείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο ακτίνας $\rho = 2|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ (10 μονάδες)

Δ2. Για $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1$ και $\sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος (1) παίρνει τη μορφή

$$C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 6 \quad (10 \text{ μονάδες})$$

Δ3. Να εξετάσετε αν η εστία της παραβολής $y^2 = 8x$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C του προηγούμενου ερωτήματος Δ2. (5 μονάδες)