

Ονοματεπώνυμο.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τα θέματα ΔΕΝ θα μεταφερθούν στο καθαρό. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό

Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

Καμιά άλλη σημείωση να μη γίνει στο φύλλο των θεμάτων

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + B\psi + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι

παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ Μονάδες 10

B. Έστω E' και E δύο σημεία του επιπέδου $Ox\psi$. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες

τα E' και E . Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη

λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για την γωνία φ , που σχηματίζει ένα μη μηδενικό διάνυσμα με τον x'

ισχύει $0 \leq \varphi \leq \pi$.

β. Κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει

εξίσωση που δίνεται από τον τύπο $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

γ. Η απόσταση του σημείου $P(x_0, \psi_0)$ από την ευθεία $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

δίνεται από την σχέση $d = \frac{Ax_0 + B\psi_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

δ. Για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$

ε. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y =$

$\pm \frac{\beta}{a} x$ Μονάδες 5X2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(4, 5)$, $B(-2, 1)$ και $\Gamma(8, -1)$.

- α. Να δείξετε ότι η γωνία B είναι 45° Μονάδες 10
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ, Μονάδες 5
- γ. Να βρείτε την προβολή του $\overline{AB}$ στο $\overline{B\Gamma}$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται ο κύκλος $C_1: (x-3)^2 + y^2 = 8$ και η παραβολή $C_2: y^2 = 4x$.

- α. Να δείξετε ότι οι γραμμές C_1 και C_2 έχουν δύο κοινά σημεία A και B. Μονάδες 10
- β. Εάν το A βρίσκεται στην γωνία xOy των αξόνων, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε , του κύκλου στο A. Μονάδες 10
- γ. Να δείξετε ότι η ε είναι εφαπτομένη και της παραβολής. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4°

Σε σύστημα $Ox\psi$ δίνονται τα σημεία $P(-2, 0)$ και $\Sigma(2, 0)$.

- α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, \psi)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{PM} \cdot \vec{\Sigma M} = 0$ είναι ο κύκλος $x^2 + \psi^2 = 4$. Μονάδες 8
- β. Όταν το σημείο $N(\kappa, \lambda)$ κινείται στον παραπάνω κύκλο να αποδείξετε ότι το σημείο $T(\frac{\kappa}{2}, \lambda)$ κινείται σε έλλειψη. Μονάδες 5
- γ. Αν η εξίσωση της έλλειψης είναι $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ να βρείτε τις εστίες E και E' και την εκκεντρότητα της Μονάδες 7
- δ. Να αποδείξετε ότι $\hat{EBO} = 60^\circ$ όπου B μια από τις κορυφές του μικρού άξονα της έλλειψης και O η αρχή των αξόνων. Μονάδες 5

Χανιά 13 Μαΐου 2011

Ο Διευθυντής

Οι εισηγητές

Απαντήσεις

Θέμα 1°

Λ, Λ, Λ, Σ, Λ

Θέμα 2°

α) $\overrightarrow{BA} = (6, 4) \quad |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{52}$

$\overrightarrow{BG} = (10, -2) \quad |\overrightarrow{BG}| = \sqrt{104}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BG} = 52$

β) $E_{ABG} = 26 \text{ τμ}$

γ) $\text{προβ}_{\overrightarrow{BG}} \overrightarrow{AB} = (-5, 1)$

Θέμα 3°

α) Κοινά σημεία A(1, 2) και B(1, -2)

β) κέντρο K(3, 0) $\lambda_{KA} = \frac{-2}{2} = -1$ άρα $\lambda = 1$

εξίσωση εφαπτομένης ε: $\psi = \chi + 1$

γ) Α τρόπος: Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της A(1, 2) είναι η $2\psi = 2(\chi + 1)$ άρα $\psi = \chi + 1$ άρα ο κύκλος και η παραβολή έχουν κοινή εφαπτομένη στο Α

Β τρόπος: Το σύστημα $\psi^2 = 4\chi$ και $\psi = \chi + 1$ έχει επιλύουσα $\chi^2 - 2\chi + 1 = 0$ άρα $(\chi - 1)^2 = 0$, διπλή ρίζα $\chi = 1$ άρα εφάπτονται.

Θέμα 4°

α) Έστω M(χ, ψ) τότε $\overrightarrow{AM} = (\chi + 2, \psi)$ και $\overrightarrow{BM} = (\chi - 2, \psi)$ και

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (\chi + 2)(\chi - 2) + \psi^2 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 = 4$ άρα το M ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0, 0) και ακτίνας $\rho = 2$

β) έστω $\chi = \frac{\kappa}{2}$ και $\psi = \lambda$ άρα $\kappa = 2\chi$ και $\lambda = \psi$ ισχύει $\kappa^2 + \lambda^2 = 4$ άρα $4\chi^2 + \psi^2 = 4$

και $\chi^2 + \frac{\psi^2}{4} = 1$ άρα το σημείο M κινείται σε έλλειψη.

γ) για την έλλειψη ισχύουν $\alpha^2 = 4$ και $\beta^2 = 1$ άρα $\gamma^2 = 3$ και $\alpha = 2, \gamma = \sqrt{3}$

Εστίες E(0, $\sqrt{3}$) και E'(0, $-\sqrt{3}$) εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

δ) Το τρίγωνο EBO είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα $EB = \alpha = 2$ και $BO = 1 = \frac{EB}{2}$ άρα $E = 30^\circ$ και τότε γωνία EBO = 60°