

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Τα θέματα ΔΕΝ θα μεταφερθούν στο καθαρό.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό

Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

Θέμα 1^ο

A. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ με πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 .

Να αποδείξετε ότι $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$. **Μονάδες 10**

Θεωρία §3.3 σελ. 90

B. Στο γραπτό σας, να γράψετε το αριθμό της πρότασης και δίπλα τις λέξεις

«ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ», αν είναι σωστή ή λάθος αντίστοιχα.

I. Για κάθε, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$.

Λάθος

II. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $|\alpha| + |\beta| \leq |\alpha + \beta|$.

Λάθος

III. Για $x \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει $|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho, \rho)$.

Σωστό

IV. Για κάθε $\alpha \geq 0$ ισχύει $\sqrt[n]{\alpha^m} = \alpha^{\frac{m}{n}}$, όπου $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Σωστό

V. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$.

Λάθος

Μονάδες 10

Γ. i. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός αριθμού α ; **Μονάδες 3**

Θεωρία §2.3 σελ. 61

ii. Τι λέγεται n -οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ; **Μονάδες 2**

Θεωρία §2.4 σελ. 70

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (5 - \sqrt{2})x + 6 - 3\sqrt{2} = 0$.

α. Να δείξετε ότι έχει διακρίνουσα την $\Delta = (1 + \sqrt{2})^2$ και ρίζες $\rho_1 = 3$ και $\rho_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Μονάδες 15

β. Να σχηματίσετε την δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει ρίζες τις $x_1 = \rho_1 - 2$ και $x_2 = \rho_2 + \sqrt{2}$.

Μονάδες 10**Λύση**

α. Είναι $\Delta = [-(5 - \sqrt{2})]^2 - 4 \cdot (6 - 3\sqrt{2}) = 5^2 - 10\sqrt{2} + 2 - 24 + 12\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})^2$

$$\text{Έτσι } \rho_1, \rho_2 = \frac{5 - \sqrt{2} \pm (1 + \sqrt{2})}{2} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{5 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2} \\ \rho_2 = \frac{5 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}}{2} \end{cases} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{6}{2} \\ \rho_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \rho_1 = 3 \\ \rho_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

β. Είναι $x_1 = 3 - 2 = 1$ και $x_2 = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2$.

Άρα $S = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3$ και $x_1 x_2 = 2$ και η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Θέμα 3ο

Α. Να δείξετε ότι η ανίσωση $2x^2 - 3 \leq 5x$ (1) έχει λύσεις τις

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

Μονάδες 10

Β. Έστω συνάρτηση $f(x) = |2x + 1| + |x - 3|$ με πεδίο ορισμού της, το διάστημα λύσεων

$$\text{της ανίσωσης (1), } \Delta = \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) = x - 4$,

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.

Μονάδες 5

Α. Είναι $(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 \leq 0$.

Το πρόσημο της $2x^2 - 5x + 3$ είναι

x			$-1/2$
3			
Προσ.		+	0
—	0	+	

Επομένως λύσεις της (1) είναι $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

$$\begin{aligned} \text{Η } 2x^2 - 5x + 3 \text{ έχει } \Delta &= 25 + 24 = 49 \text{ και ρίζες } x_1 \\ &= \frac{5+7}{4} = 3 \text{ και} \\ x_2 &= \frac{5-7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Β. α. Αφού $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$ είναι $x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow 2x+1 \geq 0$ και

$$x \leq 3 \Leftrightarrow x-3 \leq 0, \text{ οπότε}$$

$$|2x+1| = 2x+1 \text{ και } |x-3| = -x+3, \text{ έτσι}$$

$$f(x) = 2x+1-x+3 = x-4, \text{ με } x \in \Delta.$$

β. Επειδή $0 \in \Delta$ και $f(0) = -4$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $\psi\psi$ στο $B(0, -4)$

Επίσης $f(x) = x-4 = 0 \Leftrightarrow x=4$ **απορρίπτεται** (ως τιμή του x εκτός του πεδίου ορισμού) άρα η γραφ. παράσταση της f δεν τέμνει τον $x'x$.

Θέμα 4ο

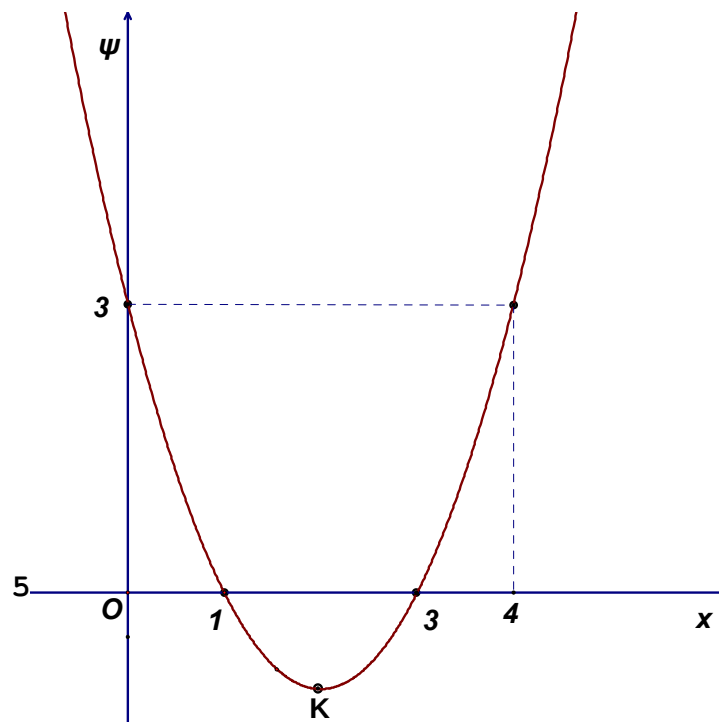
Στο διπλανό σχήμα είναι μια παραβολή, γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, που τέμνει τους άξονες στα σημεία $(1, 0)$, $(3, 0)$ και $(0, 3)$.

Α. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Μονάδες

Β. Να δείξετε ότι η κορυφή της παραβολής



Κ έχει συντεταγμένες $(2, -1)$ **Μονάδες 8**

Γ. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\sqrt{f(0)}}{\sqrt{f(1)+5}-\sqrt{f(0)}} + \frac{\sqrt{f(3)+5}}{\sqrt{f(0)+2}+\sqrt{f(4)}} = 4$$

Μονάδες 7

Δ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 3$ είτε από το σχήμα είτε με οποιονδήποτε άλλο τρόπο. **Μονάδες 5**

Λύση

Α. Αφού έχει ρίζες τα 1, 3 θα είναι (σχέσεις Vieta) $-\beta = x_1 + x_2 = 1 + 3 = 4$ άρα $\beta = -4$.

Επίσης $f(0) = 3$ άρα $\gamma = 3$. Έτσι $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Β. Επειδή είναι $-\frac{\beta}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$ και

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \text{ η κορυφή είναι } K(2, -1).$$

Γ. Από το σχήμα έχουμε $f(0) = f(4) = 3$, $f(1) = f(3) = 0$ το πρώτο μέλος της ζητούμενης

γίνεται:

$$\frac{\sqrt{f(0)}}{\sqrt{f(1)+5}-\sqrt{f(0)}} + \frac{\sqrt{f(3)+5}}{\sqrt{f(0)+2}+\sqrt{f(4)}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$$
$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{15}+3+5-\sqrt{15}}{5-3} = \frac{8}{2} = 4.$$

Δ. Η ευθεία $\psi = 3$ τέμνει την παραβολή στα σημεία $(0,3)$ και $(4, 3)$ επομένως η παραβολή είναι πάνω από την ευθεία αυτή (όπως προκύπτει από το σχήμα) για $x < 0$ ή για $x > 4$ δηλ. $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.